



ТЕОРИЯ РИСКА

лекции

Поспелова Ирина Игоревна



Влияние модификации покрытия на частоту и тяжесть убытков

Рассмотрим страховые приложения, связанные с усеченными и модифицированными случайными величинами.

В некоторых случаях необходимо различать убыток (нулевая вероятность имеет место при потере без выплаты) и платеж (случайная величина не определяется, когда платежа нет).

Y^L - убытки,

Y^P - платежи

Если различие несущественно (например, при установке максимального платежа), верхний индекс опускается.

Безусловная франшиза

Страховые полисы часто имеют франшизу на убыток d .

Когда убыток x меньше d , страховщик ничего не платит. Когда выше d , платеж составляет $x - d$.

Определение 1. Безусловная франшиза заменяет случайную величину либо на превышение убытка, либо на цензурированную слева и сдвинутую случайную величину. Результат зависит от того, применяется франшиза к платежу или убытку.

Случайная величина платежа с франшизой

$$Y^P = \begin{cases} \text{не определена;} & X \leq d; \\ X - d; & X > d; \end{cases}$$

Случайная величина убытка с франшизой

$$Y^L = \begin{cases} 0; & X \leq d \\ X - d; & X > d \end{cases}$$

Функции для случайных величин с франшизой

Заметим, что $Y^P = Y^L | Y^L > 0$. Функция плотности для случайной величины превышения платежа

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y + d)}{S_X(d)}, y > 0$$

Функция выживания

$$S_{Y^P}(y) = \frac{S_X(y + d)}{S_X(d)},$$

Функция распределения

$$F_{Y^P}(y) = \frac{(F_X(y + d) - F_X(d))}{1 - F_X(d)},$$

Уровень риска

$$h_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y + d)}{S_X(y + d)} = h_X(y + d)$$

Цензурированная слева и сдвинутая переменная имеет дискретную вероятность в нуле, равную $F_X(d)$. В остальных точках функция плотности равна $f_{Y^L}(y) = f_X(y + d)$

$$S_{Y^L}(y) = S_X(y + d)$$

$$F_{Y^L}(y) = F_X(y + d)$$

Пример 1

Найдем функции для распределения Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 2000$ для вычета 500.

$$f_{Y^P}(y) = \frac{3(2,000)^3(2,000 + y + 500)^{-4}}{(2,000)^3(2,000 + 500)^{-3}} = \frac{3(2,500)^3}{(2,500 + y)^4}, \quad S_{Y^P}(y) = \left(\frac{2,500}{2,500 + y}\right)^3$$

$$F_{Y^P}(y) = 1 - \left(\frac{2,500}{2,500 + y}\right)^3, \quad h_{Y^P}(y) = \frac{3}{2,500 + y}$$

Затем, что получили распределение Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 2500$.

Для цензурированной слева и сдвинутой переменной

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} 0.488; & y = 0; \\ \frac{3(2,000)^3}{(2,500 + y)^4}, & y > 0, \end{cases} \quad S_{Y^L}(y) = \begin{cases} 0.512; & y = 0; \\ \frac{(2,000)^3}{(2,500 + y)^3}, & y > 0 \end{cases}$$

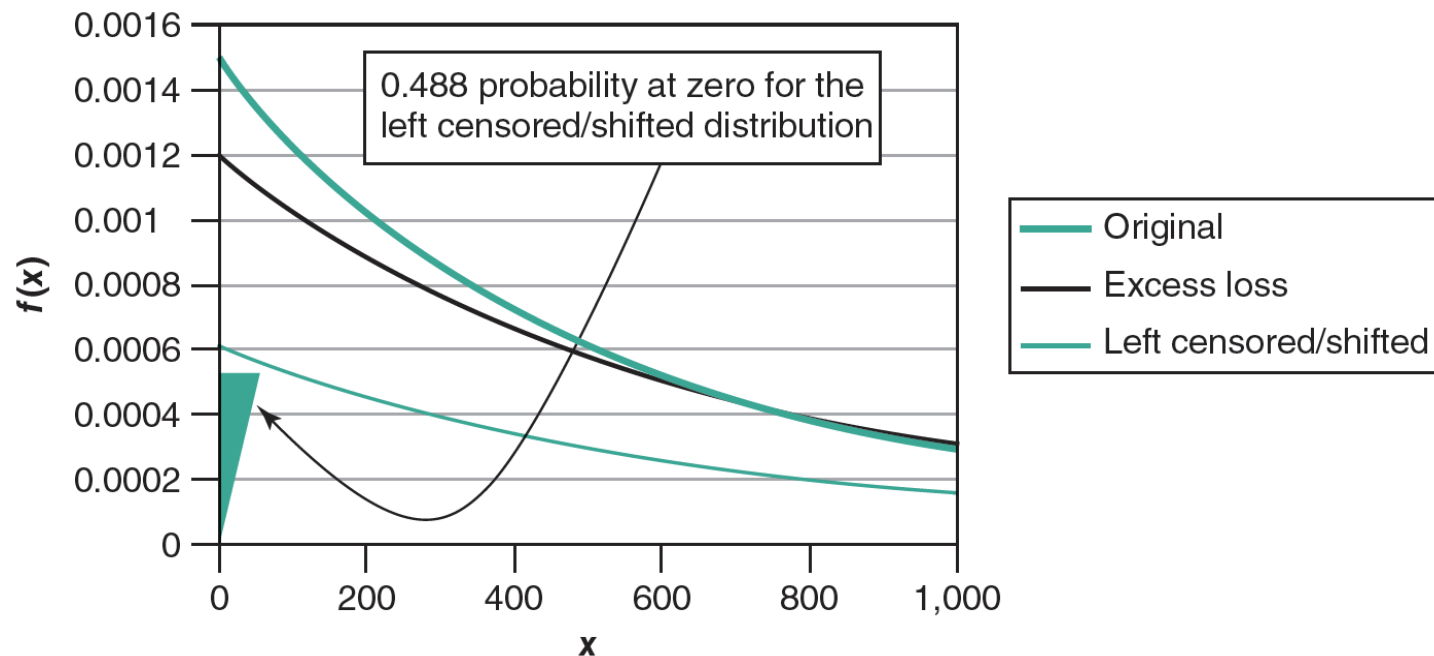
$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} 0.488; & y = 0; \\ 1 - \frac{(2,000)^3}{(2,500 + y)^3}, & y > 0, \end{cases} \quad h_{Y^L}(y) = \begin{cases} \text{не определена;} & y = 0; \\ \frac{3}{2,500 + y}, & y > 0 \end{cases}$$

Измененные плотности

Для переменной превышения потерь нужно взять часть исходной плотности от 500 и далее. Затем сдвинуть ее так, чтобы график начинался от нуля, и умножить на константу, чтобы площадь под графиком по-прежнему была равна 1.

Цензурированная слева и сдвинутая переменная также представляет собой исходную функцию плотности от 500, сдвинутую в начало координат, но без умножения на константу.

Оставшаяся вероятность сосредоточена на нуле, а не распределена.



Условная франшиза

Условная франшиза отличается от безусловной тем, что когда убыток превышает франшизу, он выплачивается в полном объеме.

Пример: страхование по инвалидности, в котором если инвалидность длится семь или менее дней, пособие не выплачивается. Однако, если нетрудоспособность длится более семи дней, ежедневные пособия выплачиваются с момента наступления нетрудоспособности.

Определение 2. Условная франшиза изменяет безусловную франшизу, добавляя размер вычета в случае положительного платежа.

Цензурированность слева со сдвигом и превышение ущерба здесь не применимы.

При расчете на убыток

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X, & X > d \end{cases}$$

При расчете на платеж

$$Y^L = \begin{cases} \text{не определена,} & X \leq d \\ X, & X > d \end{cases}$$

Функции в случае условной франшизы

	Y^L	Y^P
$f_Y(y)$	$\begin{cases} F_X(d), y = 0 \\ f_X(y), y > d \end{cases}$	$\frac{f_X(y)}{S_X(d)}, y > d$
$S_Y(y)$	$\begin{cases} S_X(d), 0 \leq y \leq d \\ S_X(y), y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 1, 0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)}, y > d \end{cases}$
$F_Y(y)$	$\begin{cases} F_X(d), 0 \leq y \leq d \\ F_X(y), y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 0, 0 \leq y \leq d \\ (F_X(y) - F_X(d))/(1 - F_X(d)), y > d \end{cases}$
$h_Y(y)$	$\begin{cases} 0, 0 < y < d \\ h_X(y), y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 0, 0 < y < d \\ h_X(y), y > d \end{cases}$

Пример 2

Повторим Пример 1 для условной франшизы 500.

Для расчета на платеж ($y > 500$)

$$f_{Y^P}(y) = \frac{3(2,000)^3(2,000 + y)^{-4}}{(2,000)^3(2,000 + 500)^{-3}} = \frac{3(2,500)^3}{(2,000 + y)^4}$$

$$S_{Y^P}(y) = \left(\frac{2,500}{2,000 + y} \right)^3$$

$$F_{Y^P}(y) = 1 - \left(\frac{2,500}{2,000 + y} \right)^3$$

$$h_{Y^P}(y) = \frac{3}{2,000 + y}$$

Пример 2

В расчете на убыток

$$\begin{aligned} f_{YL}(y) &= \begin{cases} 0.488; & y = 0; \\ \frac{3(2,000)^3}{(2,000 + y)^4}, & y > 500 \end{cases} \\ S_{YL}(y) &= \begin{cases} 0.512; & 0 \leq y \leq 500; \\ \frac{(2,000)^3}{(2,000 + y)^3}, & y > 500 \end{cases} \\ F_{YL}(y) &= \begin{cases} 0.488; & 0 \leq y \leq 500; \\ 1 - \frac{(2,000)^3}{(2,000 + y)^3}, & y > 500 \end{cases} \\ h_{YL}(y) &= \begin{cases} 0; & 0 < y < 500; \\ \frac{3}{2,000 + y}, & y > 500 \end{cases} \end{aligned}$$

Ожидаемый убыток и ожидаемый платеж

Теорема 3. Для безусловной франшизы ожидаемая стоимость убытка

$$E[X] - E[X \wedge d]$$

и ожидаемая стоимость платежа

$$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{1 - F(d)}.$$

Для условной франшизы ожидаемая стоимость убытка

$$E[X] - E[X \wedge d] + d(1 - F(d))$$

и ожидаемая стоимость платежа

$$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{1 - F(d)} + d$$

Для перехода от расчета на убыток к расчету на платеж требуется разделить выражение на $1 - F(d)$.

Поправка для условной франшизы относительно безусловной возникает из-за того, что платеж, когда он производится, увеличивается на d по сравнению с безусловной франшизой.

Пример 3

Определим ожидаемые значения для 4 случаев франшизы для распределения Парето с вычетом 500.

Используя Примеры 1 и 2, а также Теорему 3, получаем

$$F(500) = 1 - \left(\frac{2,000}{2,000 + 500} \right)^3 = 0.488$$
$$E[X \wedge 500] = \frac{2,000}{2} \left(1 - \left(\frac{2,000}{2,000 + 500} \right)^2 \right) = 360.$$

Так как $E[X] = 1000$, для безусловной франшизы ожидаемая величины убытка $1000 - 360 = 640$,

ожидаемая величина платежа $640 / (1 - 0.488) = 1250$

Для условной франшизы ожидаемые значения убытка и платежа, соответственно, равны

$$640 + 500(1 - 0.488) = 896 \text{ и } 1250 + 500 = 1750.$$

Коэффициент устранения потерь (Loss Elimination Ratio)

Для оценки эффективности применения франшизы определяют коэффициент устранения потерь (loss elimination ratio, LER).

Определение 4. Коэффициент устранения потерь это отношение уменьшения ожидаемого платежа при применении безусловной франшизы к ожидаемому платежу без франшизы.

Без франшизы ожидаемый платеж $E[X]$. С безусловной франшизой $E[X] - E[X \wedge d]$. Таким образом, коэффициент устранения потерь равен

$$\frac{E[X] - (E[X] - E[X \wedge d])}{E[X]} = \frac{E[X \wedge d]}{E[X]}.$$

Пример 4

Определим коэффициент устранения потерь для распределения Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 2,000$ и безусловной франшизой 500.

Из Примера 3 коэффициент устранения потерь равен $360 / 1000 = 0.36$.

Таким образом, 36% потерь можно исключить введением безусловной франшизы 500.

Влияние инфляции на безусловную франшизу

Инфляция увеличивает затраты, но наличие франшизы усиливает эффект инфляции. Во-первых, некоторые события, ранее порождавшие убытки ниже франшизы, могут привести к платежам. Во-вторых, относительный эффект инфляции усиливается, так как франшиза вычитается после инфляции. Например, предположим что событие ранее породило убыток 600. При франшизе 500 платеж равен 100. Инфляция 10% увеличит убытки до 660 и платеж до 160, т.е. 60% увеличение стоимости для страховщика.

Теорема 5. Для безусловной франшизы d после равномерной инфляции $1 + r$ ожидаемая стоимость убытка составляет $(1 + r) \left(E[X] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right)$.

Если $F \left(\frac{d}{1+r} \right) < 1$, то ожидаемая стоимость платежа получается делением на $1 - F \left(\frac{d}{1+r} \right)$.

Влияние инфляции на безусловную франшизу

Доказательство. После инфляции случайная величина становится равной $Y = (1 + r)X$.

По Теореме 1 (Лекция 3) $f_Y(y) = \frac{1}{1+r} f_X\left(\frac{y}{1+r}\right)$ и $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{1+r}\right)$.

$$\begin{aligned} E[Y \wedge d] &= \int_0^d y f_Y(y) dy + d(1 - F_Y(d)) = \int_0^d \frac{y}{1+r} f_X\left(\frac{y}{1+r}\right) dy + d\left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right) \\ &= \int_0^{\frac{d}{1+r}} (1+r)x f_X(x) dx + d\left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right) \\ &= (1+r) \left(\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x) dx + \frac{d}{1+r} \left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right) \right) = (1+r) E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right] \end{aligned}$$

Так как $E[Y] = (1+r)E[X]$, то получаем утверждение теоремы. Для расчетов на платеж утверждение следует из соотношения между функциями распределения Y и X .

Пример 5

Оценим эффект инфляции 10% на безусловную франшизу 500 в условиях распределения Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 2000$.

Из Примера 3 ожидаемые величины убытков и платежей равны 640 и 1250, соответственно. При инфляции 10%

$$E\left[X \wedge \frac{500}{1.1}\right] = E[X \wedge 454.55] = \frac{2000}{2} \left(1 - \left(\frac{2000}{2,000 + 454.55}\right)^2\right) = 336.08.$$

Ожидаемая стоимость на убыток после инфляции $1.1(1000 - 336.08) = 730.32$, увеличение составляет 14.11%. При расчете на платеж

$$F_Y(500) = F_X(454.55) = 1 - \left(\frac{2000}{2000 + 454.55}\right)^3 = 0.459.$$

Ожидаемая стоимость на платеж $\frac{730.32}{1 - 0.459} = 1350$, увеличение на 8%.

Ограничения по полисам

Противоположностью франшизе является ограничение по полису. Как правило, ограничение по полису указано в договоре: убыток меньше u страховщик оплачивает полностью, а убыток больше u оплачивается только в размере u .

Ограничение приводит к цензурированной справа случайной величине. Она имеет смешанное распределение и функцию плотности вида (Y – случайная величина после применения ограничения)

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u; \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u; \\ 1 - F_X(u), & y = u. \end{cases}$$

Эффект инфляции вычисляется следующим образом.

Ограничения по полисам

Теорема 6. Для ограничения по полису в размере u после применения равномерной инфляции $1 + r$ ожидаемая стоимость составит

$$(1 + r)E \left[X \wedge \frac{u}{1 + r} \right].$$

Доказательство. Ожидаемая стоимость есть $E[Y \wedge u]$. Далее см. доказательство Теоремы 5

Понятия расчета на платеж или убыток для ограничения по полису не применяются. Все убытки, которые приводят к платежам до применения ограничения, будут приводить к платежам и после него.

Пример 6

Применим ограничение в размере 3000 к распределению Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 2,000$. Определим ожидаемую стоимость при условии ограничения и долю уменьшения ожидаемой стоимости. Сделаем то же при условии 10% равномерной инфляции.

Ожидаемая стоимость равна

$$E[X \wedge 3\,000] = \frac{2\,000}{2} \left(1 - \left(\frac{2\,000}{2\,000 + 3\,000} \right)^2 \right) = 840$$

и пропорция уменьшения $(1000 - 840)/1000 = 0.16$.

После инфляции ожидаемая стоимость равна

$$1.1E \left[X \wedge \frac{3\,000}{1.1} \right] = 1.1 \frac{2\,000}{2} \left(1 - \left(\frac{2\,000}{2\,000 + \frac{3\,000}{1.1}} \right)^2 \right) = 903.11$$

и уменьшение равно $(1100 - 903.11)/1100 = 0.179$. Заметим, что после инфляции ожидаемые убытки увеличились на 7.51%, т.е. меньше, чем уровень инфляции. Этот эффект противоположен франшизе – инфляция сдерживается, а не усугубляется.

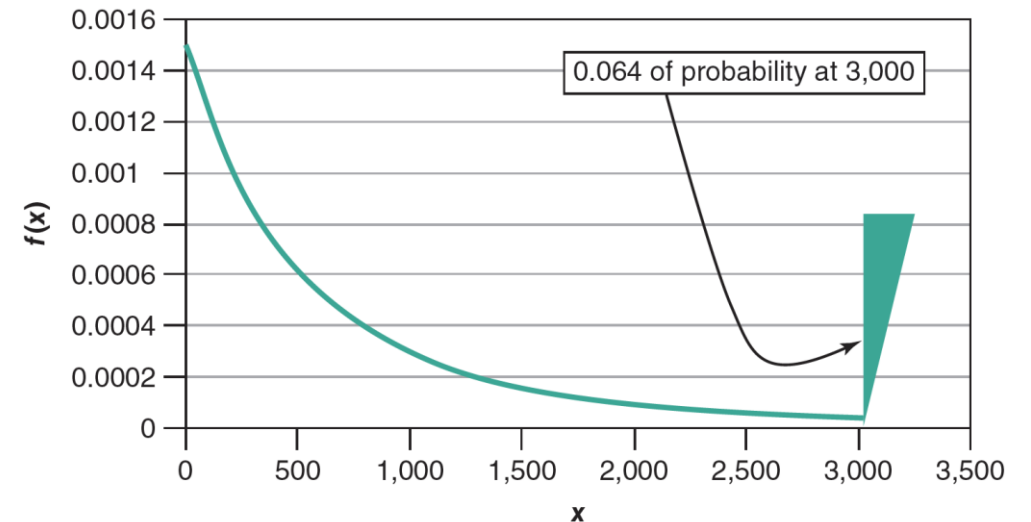
Пример 6

На рисунке показана функция плотности цензурированной справа случайной величины.

От 0 до 3000 она соответствует исходному распределению Парето. Вероятность превышения 3000

$$P\{X > 3,000\} = \left(\frac{2000}{5000}\right)^3 = 0.064$$

сконцентрирована в 3000.



Ограничение по полису и франшиза

Ограничение по полису и безусловная франшиза возникают одновременно в том смысле, что одно из них применяется к платежам компании, а второе к платежам держателя полиса.

Например, если полис имеет франшизу 500, стоимость в расчете на убыток является случайной величиной, цензурированной справа в точке 500. Когда полис имеет лимит 3000, платежи держателя полиса являются переменным, усеченными слева и сдвинутыми (как и в безусловной франшизе).

Противоположностью условной франшизе является покрытие, которое отсекает справа все убытки. Однако такое покрытие вряд ли существует (Имеет ли смысл покупать полис, по которому Вы ничего не получите, если Ваши убытки превысят u ?)

Сострахование, франшизы и лимит

Последняя широко встречающаяся модификация покрытия – сострахование (квотное перестрахование). Страховая компания платит долю убытков α , держатель поиска платит оставшуюся часть. Если сострахование является единственной модификацией, то переменная убытков X заменяется на переменную платежа $Y = \alpha X$. Если помимо сострахования применяются безусловная франшиза (d), лимит (u) и инфляция (r), получается следующее:

$$Y^L(d) = \begin{cases} 0, & X < d \\ X - d, & d \leq X \end{cases} \Rightarrow (\text{лимит}) \quad Y^L(d, u) = \begin{cases} 0, & X < d \\ X - d, & d \leq X < u \\ u - d, & X \geq u \end{cases} \Rightarrow (\text{квота})$$

$$Y^L(\alpha, d, u) = \begin{cases} 0, & X < d \\ \alpha(X - d), & d \leq X < u \\ \alpha(u - d), & X \geq u \end{cases} \Rightarrow (\text{инфл}) \quad Y^L(r, \alpha, d, u) = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha((1+r)X - d), & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u - d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

Средние платежи и убытки

Важен порядок применения модификации.

Лимит полиса равен $\alpha(u - d)$, это максимальная сумма, которая может быть выплачена. u – максимально возможный убыток, выше которого никакие выплаты не производятся. Переменная в расчете на платеж Y^P не определена для $X < \frac{d}{1+r}$.

Теорема 7. Для переменной в расчете на убыток

$$E[Y^L] = \alpha(1 + r) \left(E \left[X \wedge \frac{u}{1 + r} \right] - E \left[X \wedge \frac{d}{1 + r} \right] \right).$$

Ожидаемое значение платежа

$$E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

Средние платежи и убытки

Теорема 8. Для переменной на убыток

$$E[(Y^L)^2] = \alpha^2(1+r)^2(E[(X \wedge u^*)^2] - E[(X \wedge d^*)^2] - 2d^*E[X \wedge u^*] + 2d^*E[X \wedge d^*]),$$

где $u^* = \frac{u}{1+r}$ и $d^* = \frac{d}{1+r}$. Для второго момента переменной на платеж выражение делится на $1 - F_X(d^*)$.

Доказательство. Из определения Y^L : $Y^L = \alpha(1+r)((X \wedge u^*) - (X \wedge d^*))$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{(Y^L)^2}{(\alpha(1+r))^2} &= ((X \wedge u^*) - (X \wedge d^*))^2 = (X \wedge u^*)^2 + (X \wedge d^*)^2 - 2(X \wedge u^*)(X \wedge d^*) \\ &= (X \wedge u^*)^2 - (X \wedge d^*)^2 - 2(X \wedge d^*)((X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое можно переписать в виде

$$2(X \wedge d^*)((X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)) = 2d^*((X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)).$$

Чтобы это получить, заметим, что когда $X < d^*$, обе части равны 0; когда $d^* \leq X < u^*$, обе части равны $2d^*(X - d^*)$ и когда $X \geq u^*$, обе части равны $2d^*(u^* - d^*)$. Взятие мат. ожидания доказывает равенство.

Пример 7

Определим среднее и стандартное отклонение на убыток для распределения Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 2000$ с франшизой 500 и лимитом 2500. Заметим, что максимальное покрытие составляет $u = 3000$.

Ранее уже получили, что $E[X \wedge 500] = 360$ и $E[X \wedge 3000] = 840$. Второй момент для ограниченной случайной величины

$$\begin{aligned} E[(X \wedge u)^2] &= \int_0^u x^2 3 \frac{(2000)^3}{(x + 2000)^4} dx + u^2 \left(\frac{2000}{u + 2000} \right)^3 = 3(2000)^3 \int_{2000}^{u+2000} (y - 2000)^2 y^{-4} dy + u^2 \left(\frac{2000}{u + 2000} \right)^3 \\ &= 3(2000)^3 \left(-y^{-1} + 2000y^{-2} - \frac{2000^2}{3} y^{-3} \Big|_{2000}^{u+2000} \right) + u^2 \left(\frac{2000}{u + 2000} \right)^3 \\ &= 3(2000)^3 \left[-\frac{1}{u + 2000} + \frac{2000}{(u + 2000)^2} - \frac{2000^2}{3(u + 2000)^3} \right] + 3(2000)^3 \left[\frac{1}{2000} - \frac{2000}{2000^2} + \frac{2000^2}{3(2000^3)} \right] + u^2 \left(\frac{2000}{u + 2000} \right)^3 \\ &= 2000^2 - \left(\frac{2000}{u + 2000} \right)^3 (2u + 2000)(u + 2000). \end{aligned}$$

Тогда $E[(X \wedge 500)^2] = 160\,000$ и $E[(X \wedge 3000)^2] = 1\,440\,000$.

$$E[Y] = 840 - 360 = 480,$$

$$E[Y^2] = 1\,440\,000 - 160\,000 - 2 \cdot 500 \cdot 840 + 2 \cdot 500 \cdot 360 = 800\,000,$$

$$\text{Var}[Y] = 800\,000 - 480^2 = 569\,600, \quad \sigma[Y] = 754.72.$$

Влияние франшизы на частоту требований

Важная компонента анализа эффекта модификации полиса связана с изменением распределения частоты платежей, когда франшиза налагается или изменяется. Когда есть франшиза, число платежей становится меньше. Чем меньше франшиза, тем больше платежей.

Можно оценить количественно этот эффект, если предположить, что внесение изменений в покрытие не влияет на процесс, который приводит к убыткам, или на тип физического лица, которое приобретет страховку.

Например, те, кто покупает франшизу в размере 250 долларов на покрытие ущерба автомобилю, могут (правильно) считать, что вероятность попасть в аварию у них меньше, чем у тех, кто покупает полное покрытие.

Аналогичным образом, работодатель может обнаружить, что уровень нетрудоспособности снижается, когда работникам впервые несколько лет работы предоставляются сокращенные пособия.

Влияние франшизы на частоту требований

Пусть X_j - размер исходного убытка j -го и нет никаких модификаций.

Пусть N^L - число убытков.

Предположим, что покрытие модифицировано так, что v – вероятность того, что убыток приведет к платежу.

Например, если есть франшиза d , то $v = P\{X > d\}$.

Определим индикаторную случайную величину I_j , $I_j = 1$ если j -й убыток приводит к платежу и $I_j = 0$ иначе. Тогда I_j имеет распределение Бернулли с параметром v , и производящая функция вероятности I_j равна

$$P_{I_j}(z) = 1 - v + vz.$$

Случайная величина $N^P = I_1 + \dots + I_{N^L}$ определяет число платежей.

Если $I_1, I_2, \dots$ попарно независимы и также независимы от N^L , то N^P имеет составное распределение, в котором N^L является первичным, а распределение Бернулли вторичным. Таким образом,

$$P_{N^P}(z) = P_{N^L}(P_{I_j}(z)) = P_{N^L}(1 + v(z - 1))$$

Влияние франшизы на частоту требований

Рассмотрим (важный) частный случай, когда распределение N^L зависит от параметра θ так, что

$$P_{N^L}(z) = P_{N^L}(z, \theta) = B(\theta(1 - z))$$

где $B(z)$ не зависит от θ .

Тогда

$$P_{N^P}(z) = B(\theta(1 - 1 - vz + v)) = B(v\theta(1 - z)) = P_{N^L}(z, v\theta).$$

Из этого результата следует, что N^L и N^P оба принадлежат одному и тому же параметрическому семейству, и только параметр θ меняется.

Пример 8

Покажем, как этот результат выглядит для отрицательного биномиального распределения, и проиллюстрируем этот эффект для франшизы 250, действующей для случайной величины с отрицательным биномиальным распределением с параметрами $r = 2$ и $\beta = 3$.

Предположим, что убытки имеют распределение Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 1000$.

Производящая функция вероятности отрицательного биномиального распределения

$$P_{N_L}(z) = (1 - \beta(z - 1))^{-r}.$$

Здесь β играет роль θ и $B(z) = (1 + z)^{-r}$. Тогда N_P должно иметь отрицательное биномиальное распределение с $r^* = r$ и $\beta^* = v\beta$. В нашем случае

$$v = 1 - F(250) = \left(\frac{1000}{1000 + 250} \right)^3 = 0.512$$

Так что $r^* = 2$ и $\beta^* = 3 \cdot 0.512 = 1.536$.

Усеченные и модифицированные в нуле распределения

Пусть N_L зависит от параметров θ и α так, что

$$P_{N^L}(z) = P_{N^L}(z, \theta, \alpha) = \alpha + (1 - \alpha) \frac{(\phi(\theta(1 - z)) - \phi(\theta))}{1 - \phi(\theta)}$$

Заметим, что $\alpha = P_{N^L}(0) = P\{N^L = 0\}$, так что является модифицированной вероятностью в нуле.

Если $\phi(\theta(1 - z))$ является производящей функцией вероятности, то написанная выше производящая функция является таковой для соответствующего модифицированного в нуле распределения. Однако необязательно, чтобы $\phi(\theta(1 - z))$ была производящей функцией вероятности $P_{N^L}(z)$ указанного вида. В частности, $\phi(z) = 1 + \ln(1 + z)$ приводит к ЗМ логарифмическому распределению, несмотря на то, что не существует распределения с такой $\phi(z)$ в качестве производящей функции вероятности.

Аналогично, $\phi(z) = (1 + z)^{-r}$ для $-1 < r < 0$ приводит к распределению ETNB.

Нетрудно видеть, что

$$P_{N^P}(z) = P_{N^L}(z, v\theta, \alpha^*)$$

где $\alpha^* = P\{N^P = 0\} = P_{N^P}(0) = P_{N^L}(1 - v, \theta, \alpha)$. Вполне ожидаемо, что установление франшизы увеличивает α , так как периоды без платежей оказываются более характерными. В частности, если N^L является усеченной в нуле, то N^P будет модифицированной в нуле.

Пример 9

Повторим Пример 8 для модифицированного в нуле отрицательного биномиального распределения с $r = 2$, $\beta = 3$ и $p_0^M = 0.4$.

Производящая функция вероятности равна

$$P_{NL}(z) = p_0^M + (1 - p_0^M) \frac{(1 - \beta(z - 1))^{-r} - (1 + \beta)^{-r}}{1 - (1 + \beta)^{-r}}$$

Тогда $\alpha = p_0^M$ и $\phi(z) = (1 + z)^{-r}$. Имеем $r^* = r$, $\beta^* = v\beta$ и

$$\begin{aligned} \alpha^* = p_0^{M^*} &= p_0^M + (1 - p_0^M) \frac{((1 + v\beta)^{-r} - (1 + \beta)^{-r})}{1 - (1 + \beta)^{-r}} \\ &= \frac{p_0^M - (1 + \beta)^{-r} + (1 + v\beta)^{-r} - p_0^M(1 + v\beta)^{-r}}{1 - (1 + \beta)^{-r}} \end{aligned}$$

Для данного распределения новые параметры равны

$r^* = 2$, $\beta^* = 3 \cdot 0.512 = 1.536$ и

$$p_0^{M^*} = \frac{0.4 - 4^2 + 2.536^2 - 0.4 \cdot 2.536^2}{1 - 4^2} = 0.4595$$

Определение частоты убытков по частоте платежей

Исходили из того, что $P_{N^P}(z) = P_{N^L}(P_{I_j}(z)) = P_{N^L}(1 + v(z - 1))$.

В приложениях может возникать ситуация, когда, наоборот, необходимо определить распределение N^L из распределения N^P . Например, данные могут быть собраны для числа платежей при применении франшизы.

Нетрудно видеть, что

$$P_{N^L}(z) = P_{N^P}(1 - v^{-1} + zv^{-1})$$

Получили ту же формулу с точностью до замены v на $1 / v$.

Однако полученная производящая функция вероятности N^L может оказаться не допустимой. Это значит, что какое-то из модельных предположений является не выполнено (например, предположение о том, что изменение франшизы не меняет поведение, связанное с предъявлением требований).

Производящая функция вероятности для N^L гарантированно является допустимой производящей функцией вероятности (независимо от значения $v \in (0, 1)$) тогда и только тогда, когда производящая функция вероятности для N^P имеет смешанную форму пуассоновского распределения. Это объясняет причину смешанных пуассоновских моделей для числа страховых случаев.

Пример 10

Предположим, что платежи по полису с франшизой 250 имеют модифицированное в нуле отрицательное биномиальное распределение с $r^* = 2$, $\beta^* = 1.536$ и $p_0^{M^*} = 0.4595$.

Убытки имеют распределение Парето с $\alpha = 3$ и $\theta = 1000$.

Определим распределение числа платежей после исключения франшизы. Проведем те же вычисления для $p_0^{M^*} = 0.002$.

В первом случае используем $v = 1 / 0.512 = 1.953125$ (Пример 8) и поэтому $r = 2$, а $\beta = 1.953125 \cdot 1.536 = 3$. Также

$$p_0^{M^*} = \frac{0.4595 - 2.536^{-2} + 4^{-2} - 0.4595 \cdot 4^{-2}}{1 - 2.536^{-2}} = 0.4.$$

Для второго случая

$$p_0^{M^*} = \frac{0.002 - 2.536^{-2} + 4^{-2} - 0.002 \cdot 4^{-2}}{1 - 2.536^{-2}} = -0.1079$$

что не может быть вероятностью

Классы $(a, b, 0)$ и $(a, b, 1)$

Все распределения из классов $(a, b, 0)$ и $(a, b, 1)$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Для их распределений существуют таблицы пересчета параметров при переходе от N^L к N^P .

Если N^L имеет составное распределение, т.е. $P_{N^L}(z) = P_1(P_2(z))$, то

$$P_{N^P}(z) = P_{N^L}(1 + v(z - 1)) = P_1(P_2(1 + v(z - 1))).$$

Таким образом, N_P также будет иметь составное распределение.

Если вторичное распределение имеет $(a, b, 0)$ распределение, то можно воспользоваться таблицей пересчета.

Корректировку для вторичного распределения из класса $(a, b, 1)$ будет более сложной.